Γραμμικη Αλγεβρα II

Ασκησεις - Φυλλαδιο 8

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθοι Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

6 - 6 - 2012

Άσκηση 1. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος και* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση. Να δείξετε ότι:*

$$\langle f(\vec{x}), \vec{x}\rangle = 0, \quad \forall\, \vec{x} \in \mathcal{E} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f^* = -f$$

Αν $f^* = -f$*, ποιές είναι οι πραγματικές ιδιοτιμές της* f*;*

Λύση. *Έστω* $f^* = -f$ *και* $\vec{x} \in \mathcal{E}$*. Τότε:*

$$\begin{aligned}\big\langle f(\vec{x}), \vec{x}\big\rangle = \big\langle \vec{x}, f^*(\vec{x})\big\rangle \quad &= \quad \big\langle \vec{x}, -f(\vec{x})\big\rangle = -\big\langle \vec{x}, f(\vec{x})\big\rangle = -\big\langle f(\vec{x}), \vec{x}\big\rangle \\ &\Longrightarrow \quad 2\cdot\big\langle f(\vec{x}), \vec{x}\big\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \big\langle f(\vec{x}), \vec{x}\big\rangle = 0\end{aligned}$$

Αντίστροφα έστω $\langle f(\vec{x}), \vec{x}\rangle = 0,\ \forall\, \vec{x} \in \mathcal{E}$*. Τότε για κάθε* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ *έχουμε:*

$$\begin{aligned}\big\langle f(\vec{x}+\vec{y}), \vec{x}+\vec{y}\big\rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \big\langle f(\vec{x}), \vec{x}\big\rangle + \big\langle f(\vec{x}), \vec{y}\big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), \vec{x}\big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), \vec{y}\big\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \big\langle f(\vec{x}), \vec{y}\big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), \vec{x}\big\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \big\langle \vec{x}, f^*(\vec{y})\big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), \vec{x}\big\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \big\langle f^*(\vec{y}), \vec{x}\big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), \vec{x}\big\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \big\langle f^*(\vec{y}) + f(\vec{y}), \vec{x}\big\rangle = 0,\ \forall \vec{x} \in \mathcal{E} \\ &\Longrightarrow \quad f^*(\vec{y}) = -f(\vec{y}),\ \forall \vec{x} \in \mathcal{E} \\ &\Longrightarrow \quad f^* = -f\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι $f^* = -f$ *και έστω* λ *μια ιδιοτιμή της* f*. Συνεπώς υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα* $\vec{x} \in \mathcal{E}$ *έτσι ώστε* $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$*. Τότε:*

$$0 = \big\langle f(\vec{x}), \vec{x}\big\rangle = \big\langle \lambda\vec{x}, \vec{x}\big\rangle \Longrightarrow \begin{cases} \lambda\cdot\big\langle \vec{x}, \vec{x}\big\rangle = 0 \\ \vec{x} \neq \vec{0}\end{cases} \Longrightarrow \quad \lambda = 0$$

Επομένως αν $f^* = -f$ *τότε η μόνη πραγματική ιδιοτιμή της* f *είναι:* $\lambda = 0.$ $\square$

Άσκηση 2. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο* $\mathbb{R}^3$ *εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο. Έστω* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *η μοναδική γραμμική απεικόνιση της οποίας ο πίνακας στην κανονική βάση του* $\mathbb{R}^3$ *είναι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Να προσδιοριθεί η προσαρτημένη απεικόνιση $f^* : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *της* f.

Λύση. *Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι ο πίνακας της* f^* *σε μια ορθοκανονική βάση* $\mathcal{B}$ *είναι ο ανάστροφος του πίνακα της* f *στην* $\mathcal{B}$, *δηλαδή*

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t\mathsf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

Αφού η κανονική βάση $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *του* $\mathbb{R}^3$ *είναι ορθοκανονική έπεται ότι*

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t\mathsf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Έστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *Τότε:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+4z \\ x+2z \\ 4x+3y+z \end{pmatrix} \Longrightarrow f^*(x,y,z) = (2x+3y+4z, x+2z, 4x+3y+z)$$

<u>*Δεύτερος Τρόπος*</u>: *Από το πίνακα* A *έχουμε ότι ο τύπος της* f *είναι*

$$f(x,y,z) = (2x+y+4z, 3x+3z, 4x+2y+z),\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Έστω $(x,y,z),(x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3$. *Τότε έχουμε:*

$$\begin{aligned}
\big\langle (x_1,y_1,z_1), f^*(x,y,z) \big\rangle &= \big\langle f(x_1,y_1,z_1),(x,y,z) \big\rangle \\
&= \big\langle (2x_1+y_1+4z_1, 3x_1+3z_1, 4x_1+2y_1+z_1),(x,y,z) \big\rangle \\
&= 2x_1x + y_1x + 4z_1x + 3x_1y + 3z_1y + 4x_1z + 2y_1z + z_1z \\
&= x_1(2x+3y+4z) + y_1(x+2z) + z_1(4x+3y+z) \\
&= \big\langle (x_1,y_1,z_1),(2x+3y+4z, x+2z, 4x+3y+z) \big\rangle
\end{aligned}$$

για κάθε $(x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3$. *Άρα η προσαρτημένη απεικόνιση* $f^* : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *της* f *είναι*

$$f^*(x,y,z) = (2x+3y+4z, x+2z, 4x+3y+z),\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \qquad \square$$

Άσκηση 3. *Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο* $\mathbb{R}^3$ *εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο. Έστω* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *μια γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει:*

$$f(1,0,1) = (1,4,1), \qquad f(1,0,-1) = (-3,0,3), \qquad f(0,1,0) = (2,-1,2)$$

Να προσδιορισθεί η προσαρτημένη απεικόνιση $f^* : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *της* f.

Λύση. *Το σύνολο* $\mathcal{C} = \{(1,0,1),(1,0,-1),(0,1,0)\}$ *αποτελεί βάση του* $\mathbb{R}^3$ *η οποία όμως δεν είναι ορθοκανονική. Άρα αφού γνωρίζουμε τη τιμή της* f *στα διανύσματα της βάσης* $\mathcal{C}$ *θα βρούμε το πίνακα της* f *στη κανονική βάση* $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *του* $\mathbb{R}^3$. *Έχουμε:*

$$\begin{cases} (1,0,0) = \frac{1}{2}\cdot(1,0,1) + \frac{1}{2}\cdot(1,0,-1) + 0\cdot(0,1,0) \\ \\ (0,1,0) = 0\cdot(1,0,1) + 0\cdot(1,0,-1) + 1\cdot(0,1,0) \\ \\ (0,0,1) = \frac{1}{2}\cdot(1,0,1) + (-\frac{1}{2})\cdot(1,0,-1) + 0\cdot(0,1,0) \end{cases}$$

και άρα

$$\begin{cases} f(1,0,0) = \frac{1}{2}\cdot f(1,0,1) + \frac{1}{2}\cdot f(1,0,-1) = (\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}) + (-\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}) = (-1,2,2) \\ \\ f(0,1,0) = 1\cdot f(0,1,0) = (2,-1,2) \\ \\ f(0,0,1) = \frac{1}{2}\cdot f(1,0,1) + (-\frac{1}{2})\cdot f(1,0,-1)) = (\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}) + (\frac{3}{2},0,-\frac{3}{2}) = (2,2,-1) \end{cases}$$

Επομένως ο πίνακας της f *στη κανονική βάση* $\mathcal{B}$ *του* $\mathbb{R}^3$ *είναι*

$$A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Υπενθυμίζουμε ότι

Θεωρία: *Μια γραμμική απεικόνιση* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μεταξύ Ευκλείδειων χώρων πεπερασμένης διάστασης είναι αυτοπροσαρτημένη αν και μόνο αν ο πίνακας της* f *σε μια ορθοκανονική βάση* $\mathcal{B}$ *είναι συμμετρικός, δηλαδή:*

$$f = f^* \iff M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = {}^tM^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

Επομένως αφού ο πίνακας A *είναι συμμετρικός έπεται ότι* $f = f^*$ *και άρα η προσαρτημένη απεικόνιση* $f^* : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *της* f *είναι ακριβώς η ίδια η* f. □

Δεύτερος Τρόπος: *Παρατηρούμε ότι η βάση* $\mathcal{C}$ *είναι ορθογώνια αλλά όχι ορθοκανονική. Για να κάνουμε την* $\mathcal{C}$ *ορθοκανονική διαιρούμε κάθε διάνυσμα της βάσης* $\mathcal{C}$ *με το μήκος του και έτσι αποκτούμε την ορθοκανονική βάση*

$$\mathcal{D} = \Big\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),\quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\quad (0,1,0)\Big\}$$

Υπολογίζουμε την f *στην ορθοκανονική βάση* $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} f(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}f(1,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,4,1) \\ \\ f(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}f(1,0,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(3,0,-3) \\ \\ f(0,0,1) = (2,-1,2) \end{cases}$$

και κατόπιν εκφράζουμε τα διανύσματα αυτά ως γραμμικό συνδυασμό της ορθοκανονικής βάσης $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} f(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)) = 1\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) + 0\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) + 2\sqrt{2}(0,1,0) \\ \\ f(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)) = 0\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) - 3\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) + 0\sqrt{2}(0,1,0) \\ \\ f(0,0,1) = 2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) + 0\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) - 1\sqrt{2}(0,1,0) \end{cases}$$

Επομένως ο πίνακας της f στην ορθοκανονική βάση $\mathcal{D}$ είναι:

$$\mathsf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -3 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι συμμετρικός. Επομένως θα έχουμε $f^* = f$.

Άσκηση 4. *Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle A, B\rangle = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB)$$

θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \qquad f\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right)$$

Να εξετάσετε αν η f είναι: (α) ισομετρία, και (β) αυτοπροσαρτημένη.

Λύση. *Έχουμε:*

$$\|f\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)\| = \|\left(\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right)\| = \sqrt{\mathsf{Tr}[\left(\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)]} = \sqrt{\mathsf{Tr}[\left(\begin{smallmatrix} x^2+z^2 & xy+zw \\ yx+wz & y^2+w^2 \end{smallmatrix}\right)]} = \sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}$$

και

$$\|\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)\| = \sqrt{\mathsf{Tr}[\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right)]} = \sqrt{\mathsf{Tr}[\left(\begin{smallmatrix} x^2+y^2 & xz+yw \\ zx+wy & z^2+w^2 \end{smallmatrix}\right)]} = \sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}$$

Επομένως η f είναι ισομετρία.

Η κανονική βάση

$$\mathcal{B} = \left\{E_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), E_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), E_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), E_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$$

στον $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ είναι προφανώς ορθοκανονική. Τότε ο πίνακας της f στη βάση $\mathcal{B}$ είναι

$$\begin{cases} f\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot E_1 + 0 \cdot E_2 + 0 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4 \\ f\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 0 \cdot E_1 + 0 \cdot E_2 + 1 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4 \\ f\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 0 \cdot E_1 + 1 \cdot E_2 + 0 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4 \\ f\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 0 \cdot E_1 + 0 \cdot E_2 + 0 \cdot E_3 + 1 \cdot E_4 \end{cases} \implies A = \mathsf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε όμως ότι ο πίνακας A είναι

$$\begin{cases} A : \text{ ορθογώνιος} \implies f : \text{ ισομετρία} \\ A : \text{ συμμετρικός} \implies f : \text{ αυτοπροσαρτημένη} \end{cases}$$

Άρα η f είναι ισομετρία και $f^* = f$. $\square$

Παρατήρηση. *Η Άσκηση 4 γενικεύεται ως εξής:*

- *Έστω ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle A, B\rangle = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB)$$

θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \qquad f(A) = {}^tA$$

Τότε η f είναι αυτοπροσαρτημένη και ισομετρία.

Λύση. *Για κάθε* $n \times n$ *πίνακα* A *θα έχουμε:*

$$\langle f(A), f(A)\rangle = \langle {}^tA, {}^tA\rangle = \mathsf{Tr}({}^tA \cdot {}^t({}^tA)) = \mathsf{Tr}({}^tA \cdot A)$$

Επειδή, όπως γνωρίζουμε $\mathsf{Tr}(A \cdot B) = \mathsf{Tr}(B \cdot A)$, *η προηγούμενη σχέση γράφεται:*

$$\langle f(A), f(A)\rangle = \mathsf{Tr}({}^tA \cdot A) = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tA) = \langle A, A\rangle$$

και άρα η f *είναι ισομετρία. Ιδιαίτερα θα έχουμε ότι*

(1) $$f^{-1} = f^*$$

Παρατηρούμε ότι, επειδή $f^2(A) = f(f(A)) = f({}^tA) = {}^t({}^tA) = A$, *θα έχουμε:*

$$f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})}$$

απ΄ όπου έπεται ότι

(2) $$f^{-1} = f$$

Από τις (1) *και* (2) *έπεται ότι:*

$$f^* = f$$

και άρα η f *είναι αυτοπροσαρτημένη.*

Η Άσκηση **4** *είναι η ειδική περίπτωση* $n = 2$ *του παραπάνω αποτελέσματος.*

Άσκηση 5. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle\ ,\rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος. Έστω* $f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *δύο γραμμικές απεικονίσεις, και* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Να δείξετε ότι:*

(1) $(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g*$.
(2) $(f^*)^* = f$.

Λύση. *Έστω* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. *Τότε:*

$$\begin{aligned}
\big\langle \vec{x}, (\lambda f + \mu g)^*(\vec{y})\big\rangle &= \big\langle (\lambda f + \mu g)(\vec{x}), \vec{y}\big\rangle \\
&= \big\langle \lambda f(\vec{x}) + \mu g(\vec{x}), \vec{y}\big\rangle \\
&= \big\langle \lambda f(\vec{x}), \vec{y}\big\rangle + \big\langle \mu g(\vec{x}), \vec{y}\big\rangle \\
&= \lambda\big\langle f(\vec{x}), \vec{y}\big\rangle + \mu\big\langle g(\vec{x}), \vec{y}\big\rangle \\
&= \lambda\big\langle \vec{x}, f^*(\vec{y})\big\rangle + \mu\big\langle \vec{x}, g^*(\vec{y})\big\rangle \\
&= \big\langle \vec{x}, \lambda f^*(\vec{y})\big\rangle + \big\langle \vec{x}, \mu g^*(\vec{y})\big\rangle \\
&= \big\langle \vec{x}, \lambda f^*(\vec{y}) + \mu g^*(\vec{y})\big\rangle \\
&= \big\langle \vec{x}, (\lambda f^* + \mu g^*)(\vec{y})\big\rangle
\end{aligned}$$

Εφόσον η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$ τότε προκύπτει ότι

$$(\lambda f + \mu g)^*(\vec{y}) = (\lambda f^* + \mu g^*)(\vec{y}),\ \forall \vec{y} \in \mathcal{E} \quad \Longrightarrow \quad (\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$$

Για το δεύτερο ερώτημα έχουμε:

$$\big\langle \vec{x}, (f^*)^*(\vec{y}) \big\rangle = \big\langle f^*(\vec{x}), \vec{y} \big\rangle = \big\langle \vec{x}, f(\vec{y}) \big\rangle,\ \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$$

και άρα $(f^*)^*(\vec{y}) = f(\vec{y})$ *για κάθε* $\vec{y} \in \mathcal{E}$. *Επομένως:* $(f^*)^* = f$. $\square$

Άσκηση 6. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και*

$$f,\ g\ :\ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο γραμμικές απεικονίσεις.

(1) *Να δείξετε ότι:* $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
(2) *Η* f *είναι ισομορφισμός αν και μόνον η* f^* *είναι ισομορφισμός, και τότε:*

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$$

Λύση. (1) *Για τυχόντα διανύσματα* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$, *θα έχουμε:*

$$\langle \vec{x}, (f \circ g)^*(\vec{y}) \rangle = \langle (f \circ g)(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle f(g(\vec{x})), \vec{y} \rangle = \langle g(\vec{x}), f^*(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, g^*(f^*(\vec{y})) \rangle = \langle \vec{x}, (g^* \circ f^*)(\vec{y}) \rangle$$

Επειδή η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$, *έπεται ότι:* $(f \circ g)^*(\vec{y}) = g^*(f^*(\vec{y})) = (g^* \circ f^*)(\vec{y}), \forall \vec{y} \in \mathcal{E}$. *Επομένως:*

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

(2) *Αν η* f *είναι ισομορφισμός, τότε επειδή* $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} = f^{-1} \circ f$, *από το* (1) *και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι* $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, *θα έχουμε:*

$$(f \circ f^{-1})^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}^* = (f^{-1} \circ f)^* \quad \Longrightarrow \quad (f^{-1})^* \circ f^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} = f^* \circ (f^{-1})^*$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι η f^* *είναι ισομορφισμός και*

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$$

Αντίστροφα αν η f^* *είναι ισομορφισμός, τότε υπάρχει γραμμική απεικόνιση* $g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *έτσι ώστε:*

$$f^* \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} = g \circ f^*$$

Τότε όπως παραπάνω θα έχουμε:

$$(f^* \circ g)^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}^* = (g \circ f^*)^* \quad \Longrightarrow \quad g^* \circ (f^*)^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} = (f^*)^* \circ g^*$$

Από την Άσκηση 5, *έχουμε* $(f^*)^* = f$ *και άρα η παραπάνω σχέση γράφεται:*

$$g^* \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} = f \circ g^*$$

Τότε προφανώς η f *είναι ισομορφισμός.*

Άσκηση 7. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle\ ,\ \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης και* $f\ :\ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *μια γραμμική απεικόνιση, έτσι ώστε:* $f^* = -f$.

(1) *Να δείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση* $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f\ :\ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι ισομορφισμός.*
(2) *Να δείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση* $(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} - f) \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f)^{-1}\ :\ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι ισομετρία.*

Λύση. *Αφού* $f^* = -f$ *από την Άσκηση* 1 *γνωρίζουμε ότι* $\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0,\ \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, *και η μοναδική πραγματική ιδιοτιμή είναι η* $\lambda = 0$.

(1) *Υποθέτουμε αντίθετα ότι η γραμμική απεικόνιση* $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f \ : \ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *δεν είναι ισομορφισμός. Τότε ο πυρήνας της* $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f$ *δεν είναι ο τετριμένος, δηλαδή* $\mathsf{Ker}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f) \neq \{\vec{0}\}$ *και άρα υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα* $\vec{u} \in \mathcal{E}$ *έτσι ώστε*

$$(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f)(\vec{u}) = 0 \implies \vec{u} + f(\vec{u}) = 0 \implies f(\vec{u}) = -\vec{u}$$

Συνεπώς: $\lambda = -1$ *αποτελεί ιδιοτιμή της* f. *Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η μοναδική πραγματική ιδιοτιμή της* f *είναι μόνο η* $\lambda = 0$. *Επομένως η γραμμική απεικόνιση* $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f \ : \ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι ισομορφισμός.*

(2) *Έστω* $\vec{x} \in \mathcal{E}$. *Θα δείξουμε ότι*

$$\|\vec{x}\|^2 = \|(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} - f) \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f)^{-1}(\vec{x})\|^2$$

Αφού η γραμμική απεικόνιση $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f \ : \ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι ισομορφισμός έχουμε:* $\vec{x} = (\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f)(\vec{y})$ *για κάποιο* $\vec{y} \in \mathcal{E}$. *Επομένως από τη παραπάνω σχέση αρκεί να δείξουμε ότι*

$$\|(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f)(\vec{y})\|^2 = \|(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} - f) \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f)^{-1} \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f)(\vec{y})\|^2 = \|(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{y})\|^2$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f)(\vec{y})\|^2 &= \big\langle (\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f)(\vec{y}), (\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f)(\vec{y}) \big\rangle \\
&= \big\langle \vec{y} + f(\vec{y}), \vec{y} + f(\vec{y}) \big\rangle \\
&= \big\langle \vec{y}, \vec{y} \big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), f(\vec{y}) + 2 \cdot \big\langle \vec{y}, f(\vec{y}) \big\rangle \big\rangle \\
&= \big\langle \vec{y}, \vec{y} \big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), f(\vec{y}) \big\rangle
\end{aligned}$$

διότι $\big\langle \vec{y}, f(\vec{y}) \big\rangle = 0$ *για κάθε* $\vec{y} \in \mathcal{E}$, *και παρόμοια υπολογίζουμε:*

$$\begin{aligned}
\|(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{y})\|^2 &= \big\langle (\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{y}), (\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{y}) \big\rangle \\
&= \big\langle \vec{y} - f(\vec{y}), \vec{y} - f(\vec{y}) \big\rangle \\
&= \big\langle \vec{y}, \vec{y} \big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), f(\vec{y}) - 2 \cdot \big\langle \vec{y}, f(\vec{y}) \big\rangle \big\rangle \\
&= \big\langle \vec{y}, \vec{y} \big\rangle + \big\langle f(\vec{y}), f(\vec{y}) \big\rangle
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\|(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f)(\vec{y})\|^2 = \|(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} - f)(\vec{y})\|^2$$

και άρα η γραμμική απεικόνιση $(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} - f) \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + f)^{-1} \ : \ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι ισομετρία.* □

Άσκηση 8. *Έστω* $(\mathcal{E}, \langle \ , \ \rangle)$ *ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και*

$$f \ : \ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

μια γραμμική απεικόνιση. Να δείξετε ότι:

(1) $\mathsf{Ker}(f^*) = \mathsf{Im}(f)^{\perp}$.
(2) $\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Im}(f^*)^{\perp}$.
(3) $\mathsf{Im}(f^*) = \mathsf{Ker}(f)^{\perp}$.
(4) $\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Ker}(f^*)^{\perp}$.

(5) *Αν $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, τότε:*

$$f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f^*(\mathcal{V}^\perp) \subseteq \mathcal{V}^\perp$$

Λύση. (1) *Έχουμε:*

$$\begin{aligned}
\mathsf{Im}(f)^\perp &= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \big\langle \vec{y}, \vec{x} \big\rangle = 0 \ \text{ για κάθε } \ \vec{y} \in \operatorname{Im} f\big\} \\
&= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \big\langle f(\vec{z}), \vec{x} \big\rangle = 0 \ \text{ για κάθε } \ \vec{z} \in \mathcal{E}\big\} \\
&= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \big\langle \vec{z}, f^*(\vec{x}) \big\rangle = 0 \ \text{ για κάθε } \ \vec{z} \in \mathcal{E}\big\} \\
&= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f^*(\vec{x}) = \vec{0}\big\} \\
&= \operatorname{Ker}(f^*)
\end{aligned}$$

(2) *Έχουμε:*

$$\begin{aligned}
\mathsf{Im}(f^*)^\perp &= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \big\langle \vec{x}, \vec{y} \big\rangle = 0 \ \text{ για κάθε } \ \vec{y} \in \operatorname{Im} f^*\big\} \\
&= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \big\langle \vec{x}, f^*(\vec{z}) \big\rangle = 0 \ \text{ για κάθε } \ \vec{z} \in \mathcal{E}\big\} \\
&= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \big\langle f(\vec{x}), \vec{z} \big\rangle = 0 \ \text{ για κάθε } \ \vec{z} \in \mathcal{E}\big\} \\
&= \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\big\} \\
&= \operatorname{Ker}(f)
\end{aligned}$$

(3) *Από το* (2) *έπεται ότι:* $\mathsf{Im}(f^*) = (\mathsf{Im}(f^*)^\perp)^\perp = \operatorname{Ker}(f)^\perp$.

(4) *Χρησιμοποιώντας το* (1) *έχουμε:* $\operatorname{Im}(f) = (\operatorname{Im}(f)^\perp)^\perp = \operatorname{Ker}(f^*)^\perp$.

(5) *Υποθέτουμε ότι* $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$ *και έστω* $\vec{x} \in \mathcal{V}^\perp$. *Θα δείξουμε ότι* $f^*(\vec{x}) \in \mathcal{V}^\perp$. *Έστω* $\vec{v} \in \mathcal{V}$. *Τότε*

$$\big\langle \vec{v}, f^*(\vec{x}) \big\rangle = \big\langle f(\vec{v}), \vec{x} \big\rangle = 0$$

διότι $\vec{x} \in \mathcal{V}^\perp$ *και* $f(\vec{v}) \in \mathcal{V}$. *Συνεπώς:*

$$f^*(\mathcal{V}^\perp) \subseteq \mathcal{V}^\perp$$

Υποθέτουμε αντίστροφα ότι $f^*(\mathcal{V}^\perp) \subseteq \mathcal{V}^\perp$, *δηλαδή* $\big\langle \vec{v}, f^*(\vec{x}) \big\rangle = 0$ *για κάθε* $\vec{v} \in \mathcal{V}$ *και* $\vec{x} \in \mathcal{V}^\perp$. *Τότε:*

$$\big\langle \vec{v}, f^*(\vec{x}) \big\rangle = 0 \ \ \forall \vec{x} \in \mathcal{V}^\perp \quad \Longrightarrow \quad \big\langle f(\vec{v}), \vec{x} \big\rangle = 0 \ \ \forall \vec{x} \in \mathcal{V}^\perp \quad \Longrightarrow \quad f(\vec{v}) \in (\mathcal{V}^\perp)^\perp = \mathcal{V}$$

και άρα

$$f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V} \qquad \square$$